Отчёт за 2020 год по конкурсу «Молодая математика России»

Герман О. Н.

Полученные в 2020 году результаты

В этом году удалось развить методы параметрической геометрии чисел и применить их в теории диофантовых приближений с весами, а также к задачам о диофантовых экспонентах решёток.

Диофантовы приближения с весами. Дадим сначала несколько определений. Пусть

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_{11} & \cdots & \theta_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{n1} & \cdots & \theta_{nm} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}, \quad n+m=d.$$

Пусть также заданы наборы весов $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m) \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \ldots, \rho_n) \in \mathbb{R}^n$ такие что

$$\sigma_1 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_m > 0, \qquad \rho_1 \geqslant \ldots \geqslant \rho_n > 0, \qquad \sum_{j=1}^{m} \sigma_j = \sum_{i=1}^{n} \rho_i = 1.$$

Положим

$$|\mathbf{x}|_{\boldsymbol{\sigma}} = \max_{1\leqslant j\leqslant m} |x_j|^{1/\sigma_j} \qquad \text{для каждого } \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m),$$

$$|\mathbf{y}|_{\boldsymbol{\rho}} = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |y_i|^{1/\rho_i} \qquad \text{для каждого } \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n).$$

Рассмотрим систему неравенств

$$\begin{cases} |\mathbf{x}|_{\boldsymbol{\sigma}} \leqslant t \\ |\Theta\mathbf{x} - \mathbf{y}|_{\boldsymbol{\rho}} \leqslant t^{-\gamma} \end{cases} \tag{1}$$

Определение 1. Для каждого целого k, $1 \leqslant k \leqslant d$, определим k-ю *взвешенную диофантову экспоненту* $\omega^{(k)}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho}}(\Theta)$ *первого типа* как супремум вещественных γ, таких что система (1) имеет k линейно независимых решений относительно $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^{m+n}$ для некоторых сколь угодно больших t.

Определение 2. Для каждого целого k, $1 \leqslant k \leqslant d$, определим k-ю *равномерную взвешенную диофантову экспоненту* $\hat{\omega}^{(k)}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho}}(\Theta)$ *первого типа* как супремум вещественных γ, таких что система (1) имеет k линейно независимых решений относительно $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^{m+n}$ для каждого достаточно большого t.

Далее, определим для каждых $s, \gamma \in \mathbb{R}$ параллелепипед

$$\mathcal{P}(s,\gamma) = \left\{ \mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; \begin{array}{ll} |z_j| \leqslant e^{s\sigma_j}, & j = 1, \ldots, m \\ |z_{d+1-i}| \leqslant e^{-s\rho_i\gamma}, & i = 1, \ldots, n \end{array} \right\}$$

и рассмотрим решётку

$$\Lambda = \Lambda(\Theta) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \\ -\Theta & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^d, \qquad d = m+n.$$

Определение 3. Для каждого целого k, $1 \leqslant k \leqslant d$, определим k-ю *взвешенную диофантову экспоненту* $\Omega_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho}}^{(k)}(\Theta)$ *второго типа* как супремум вещественных γ, таких что k-й псевдоприсоединённый параллелепипед $\mathcal{P}^{[k]}(s,\gamma)$ содержит ненулевой элемент $\bigwedge^k(\Lambda)$ для некоторых сколь угодно больших s.

Определение 4. Для каждого целого k, $1 \leqslant k \leqslant d$, определим k-ю *равномерную взвешенную диофантову экспоненту* $\hat{\Omega}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho}}^{(k)}(\Theta)$ *второго типа* как супремум вещественных γ, таких что k-й псевдоприсоединённый параллелепипед $\mathcal{P}^{[k]}(s,\gamma)$ содержит ненулевой элемент $\bigwedge^k(\Lambda)$ для всех достаточно больших s.

В 2020-м году о для промежуточных взвешенных экспонент первого и второго типа удалось доказать следующие теоремы:

Теорема 1. *Для каждого $k \in \{1,\ldots,d\}$ справедливы неравенства*

$$\omega_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho}}^{(k)}(\Theta)\cdot\hat{\omega}_{\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\sigma}}^{(d+1-k)}(\Theta^{\intercal})=1, \qquad \hat{\omega}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho}}^{(k)}(\Theta)\cdot\omega_{\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\sigma}}^{(d+1-k)}(\Theta^{\intercal})=1.$$

Здесь подразумевается, что если какой-то из множителей равен нулю, то другой равен $+\infty$, и наоборот.

Теорема 2. *Положим $\Omega_k=\Omega_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho}}^{(k)}(\Theta)$ и $\Omega_k^{\intercal}=\Omega_{\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\sigma}}^{(k)}(\Theta^{\intercal})$ для $k=1,\ldots,d$. Тогда*

$$\Omega_1\geqslant\ldots\geqslant\Omega_k\geqslant\ldots\geqslant\Omega_{d-1}\geqslant\frac{\left(\sigma_m^{-1}-1\right)+\rho_n^{-1}\Omega_1^{\intercal}}{\sigma_m^{-1}+\left(\rho_n^{-1}-1\right)\Omega_1^{\intercal}}\,.$$

Теорема 1 усиливает и обобщает теорему переноса для неоднородных взвешенных экспонент, полученную недавно Чоу, Гошем, Гуаном, Марна и Симмонсом. Теорема 2 усиливает аналог теоремы переноса Хинчина для взвешенных экспонент, полученную в прошлом году автором в рамках работ по данному проекту.

Диофантовы экспоненты решёток. Так же, как и в предыдущем пункте, дадим сначала несколько определений.

Пусть Λ — произвольная решётка в $\mathbb{R}^d$ с определителем 1. Для каждого $\mathbf{v}=(v_1,\ldots,v_d)\in\mathbb{R}^d$ положим

$$\Pi(\mathbf{v})=\prod_{1\leqslant i\leqslant d}|v_i|^{1/d}$$

и

$$\mathcal{P}(\mathbf{v})=\Big\{\mathbf{z}=(z_1,\ldots,z_d)\in\mathbb{R}^d\ \Big|\ |z_i|\leqslant|v_i|,\ i=1,\ldots,d\Big\}.$$

Определение 5. Для каждого целого k, $1\leqslant k\leqslant d$, определим для решётки Λ k-ю *диофантову экспоненту первого типа* $\omega_k(\Lambda)$ как супремум вещественных γ, таких что $\mathcal{P}(\mathbf{v})$ содержит k линейно независимых точек решётки Λ при некотором $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^d$, удовлетворяющем условию $\Pi(\mathbf{v})=|\mathbf{v}|^{-\gamma}$, со сколь угодно большим $|\mathbf{v}|$.

Определение 6. Для каждого целого k, $1\leqslant k\leqslant d$, определим для решётки Λ k-ю *равномерную диофантову экспоненту первого типа* $\hat{\omega}_k(\Lambda)$ как супремум вещественных γ, таких что $\mathcal{P}(\mathbf{v})$ содержит k линейно независимых точек решётки Λ при каждом $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^d$, удовлетворяющем условию $\Pi(\mathbf{v})=|\mathbf{v}|^{-\gamma}$, с достаточно большим $|\mathbf{v}|$.

Далее, положим для каждого $\mathbf{v}=(v_1,\ldots,v_d)\in\mathbb{R}^d$

$$\mathcal{P}^{[k]}(\mathbf{v})=\Big\{\mathbf{Z}=(Z_{i_1,\ldots,i_k})\in\textstyle\bigwedge^k(\mathbb{R}^d)\ \Big|\ |Z_{i_1,\ldots,i_k}|\leqslant\displaystyle\prod_{j=1}^{k}|v_{i_j}|\Big\}.$$

Обобщим также при помощи следующим образом sup-норму и функционал $\Pi(\cdot)$. Положим для каждого $\mathbf{v}=(v_1,\ldots,v_d)\in\mathbb{R}^d$

$$|\mathbf{v}|^{[k]}=\max_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant d}\prod_{1\leqslant j\leqslant k}|v_{i_j}|^{1/k}.$$

Тогда, в частности, $|\mathbf{v}|^{[1]}=|\mathbf{v}|$ и $|\mathbf{v}|^{[d]}=\Pi(\mathbf{v})$.

Определение 7. Для каждого целого k, $1\leqslant k\leqslant d$, определим для решётки Λ k-ю *диофантову экспоненту второго типа* $\Omega_k(\Lambda)$ как супремум вещественных γ, таких что $\mathcal{P}^{[k]}(\mathbf{v})$ содержит ненулевой элемент $\bigwedge^k(\Lambda)$ при некотором $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^d_{>0}$, удовлетворяющем условию $\Pi(\mathbf{v})=\big(|\mathbf{v}|^{[k]}\big)^{-\gamma}$, со сколь угодно большим $|\mathbf{v}|$.

Определение 8. Для каждого целого k, $1\leqslant k\leqslant d$, определим для решётки Λ k-ю *равномерную диофантову экспоненту второго типа* $\hat{\Omega}_k(\Lambda)$ как супремум вещественных γ, таких что $\mathcal{P}^{[k]}(\mathbf{v})$ содержит ненулевой элемент $\bigwedge^k(\Lambda)$ при каждом $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^d_{>0}$, удовлетворяющем условию $\Pi(\mathbf{v})=\big(|\mathbf{v}|^{[k]}\big)^{-\gamma}$, с достаточно большим $|\mathbf{v}|$.

В 2020-м году о для промежуточных экспонент решёток первого и второго типа удалось доказать следующие теоремы:

Теорема 3. *Экспоненты $\omega_k(\Lambda)$, $\hat{\omega}_{d+1-k}(\Lambda^*)$ имеют различные знаки или одновременно равны нулю.*

Если они отличны от нуля, обозначим через A ту из них, которая положительна, и через B — ту, которая отрицательна. Тогда

$$\frac{A^{-1}+1}{(d-1)}\leqslant-(B^{-1}+1)\leqslant(d-1)(A^{-1}+1).$$

Теорема 4. *Если хотя бы одна из экспонент $\Omega_1(\Lambda),\ldots,\Omega_{d-1}(\Lambda),\Omega_1(\Lambda^*),\ldots,\Omega_{d-1}(\Lambda^*)$ равна нулю, то равны нулю и все остальные. Если же они отличны от нуля, то*

$$\frac{1+\Omega_1(\Lambda)^{-1}}{d-1}\leqslant\ldots\leqslant\frac{k}{d-k}\big(1+\Omega_k(\Lambda)^{-1}\big)\leqslant\ldots\leqslant(d-1)\big(1+\Omega_{d-1}(\Lambda)^{-1}\big)$$

и $\Omega_{d-1}(\Lambda)=\Omega_1(\Lambda^*)$.

Теорема 4 усиливает аналог теоремы переноса Хинчина для экспонент решёток.

Опубликованные и подготовленные в 2020 году работы

[1] O. N. German *Transference theorems in Diophantine approximation with weights*, Mathematika **66**:2 (2020), 325–342

[2] О. Н. Герман *Линейные формы заданного диофантового типа и экспоненты решеток*, Известия РАН **84**:1 (2020), 5–26

[3] О. Н. Герман, И. А. Тлюстангелов *Симметрии двумерной цепной дроби*, принято в печать в Известия РАН; arXiv:2007.02831

[4] O. N. German *Multiparametric geometry of numbers and its application to splitting transference theorems*, препринт; arXiv:2007.02814

Доклады на конференциях в 2020 году

- “Combinatorics and geometry days II” (Россия, 13–16 апреля 2020, онлайн), приглашённый доклад
- “Number Theory Down Under 8” (University of Melbourne, Австралия, 6–8 октября 2020, онлайн), приглашённый доклад
- “Ломоносовские чтения – 2020” (Москва, Россия, 23 октября 2020, онлайн), устный доклад

Педагогическая деятельность

- Курс “Элементы теории чисел”, мехмат МГУ, 1 курс, лекции и семинары
- Спецкурс “Геометрия диофантовых приближений”, мехмат МГУ, 1–6 курс
- Научное руководство двумя аспирантами (Ибрагим Тлюстангелов и Эльмир Бигушев) и тремя студентами (Александр Банарь, Артемий Соколов, Александр Малахов)
- Курс алгебры и теории чисел, Декабрьская математическая образовательная программа, ОЦ «Сириус»

Итог трёх лет

Три года назад мы планировали проводить исследования по трём группам задач. Первая группа задач касается теории диофантовых экспонент решёток, вторая — многомерных цепных дробей, третья — вопросов о диофантовых свойствах двумерных подпространств $\mathbb{R}^4$. По первому направлению была доказана теорема о структуре спектра диофантовых экспонент решёток, были введены понятия промежуточных экспонент первого и второго типа и доказаны неравенства, связывающие эти экспоненты, которые позволили усилить существующую теорему переноса для диофантовых экспонент решёток. По второму направлению совместно с Ибрагимом Тлюстангеловым была написана статья о палиндромических симметриях двумерных цепных дробей, в которой доказывается критерий существования целочисленных симметрий, отличных от симметрий Дирихле, — аналог классического критерия для обыкновенных цепных дробей квадратичных иррациональностей. Активно позаниматься в третьем направлении пока не получилось, по той причине, что, во-первых, возникли идеи, позволившие доказать аналог теоремы переноса Хинчина для диофантовых приближений с весами, а во-вторых, при работе с диофантовыми приближениями с весами стало понятно, в каком направлении нужно развивать параметрическую геометрию чисел, чтобы усилить и результаты, касающиеся диофантовых приближений с весами, и результаты, касающиеся диофантовых экспонент решёток. В этом направлении мы в последнее время и думали, что отражено в приведённом выше описании полученных в 2020-м году результатов.